Геометрия — 1

Denis Bakin

План

1. Основные понятия: точки, вектора, отрезки, лучи
2. Хранение в C++, операции над векторами
3. Скалярное и векторное произведения
4. Три способа задать прямую на плоскости
5. Расстояния: точка–точка, точка–прямая, точка–луч
6. Принадлежность точки прямой, лучу, отрезку
7. Пересечения прямых и отрезков

Основные понятия

- **Плоскость** — две перпендикулярные оси Ox, Oy
- **Точка** — пара чисел (x, y)
- **Вектор** — направленный отрезок, задаётся парой (x, y)

Основные понятия

- **Плоскость** — две перпендикулярные оси Ox, Oy
- **Точка** — пара чисел (x, y)
- **Вектор** — направленный отрезок, задаётся парой (x, y)

- **Отрезок** — часть прямой между двумя точками (неориентирован)
- **Луч** — часть прямой, ограниченная с одной стороны

Точка $\simeq$ вектор

- И точка, и вектор — пара чисел (x, y)
- Каждой точке соответствует **радиус-вектор** — вектор из начала координат в эту точку

Точка $\simeq$ вектор

- И точка, и вектор — пара чисел (x, y)
- Каждой точке соответствует **радиус-вектор** — вектор из начала координат в эту точку
- Будем хранить и точки, и вектора одной структурой

Напоминание: линейная функция

$y = kx + b$ — прямая на плоскости

- k — **угловой коэффициент** (наклон прямой)
- $k = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Хранение в C++

```cpp
struct Point {
    int x = 0;
    int y = 0;

    Point() = default;
    Point(int x, int y) : x(x), y(y) {}
};
```

- `int` — если координаты целые, многие операции можно проводить без `double`
- Избегаем проблем с точностью чисел с плавающей точкой

Операторы

```
Point operator+(Point a, Point b) {
    return {a.x + b.x, a.y + b.y};
}
Point operator-(Point a, Point b) {
    return {a.x - b.x, a.y - b.y};
}
Point operator*(int k, Point a) {
    return {k * a.x, k * a.y};
}
```

Теперь можно писать `Point c = a + b;`

Длина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

```
double length(Point a) {
    return std::hypot(a.x, a.y);
}
```

- `std::hypot` — точнее и безопаснее, чем `sqrt(x*x + y*y)`

Угол вектора

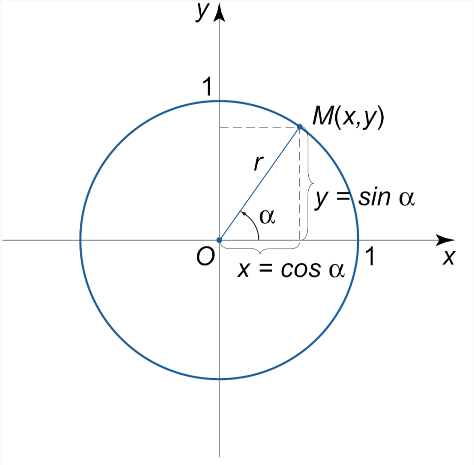

Figure 1: Тригонометрический круг

Угол вектора

```cpp
double angle(Point a) {
    return std::atan2(a.y, a.x);
}
```

Результат в радианах: $[-\pi, +\pi]$. Для градусов: $\alpha_{\circ} = \alpha_{\text{рад}} \cdot \frac{180}{\pi}$

Скалярное произведение (dot product)

Через угол:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

Скалярное произведение (dot product)

Через угол:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\theta$$

Через координаты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$$

Скалярное произведение: геометрический смысл

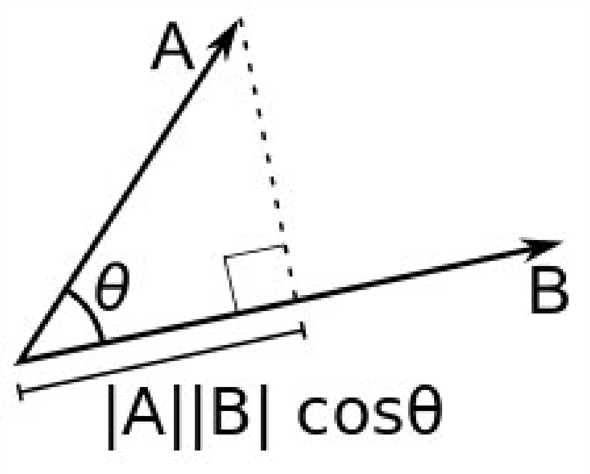

Figure 2: Скалярное произведение как проекция

Проекция $\vec{b}$ на направление $\vec{a}$, умноженная на $|\vec{a}|$

Скалярное произведение: свойства

- Симметрично: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Угол острый $\Rightarrow$ произведение > 0
- Угол тупой $\Rightarrow$ произведение < 0
- **Вектора перпендикулярны** $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\cos 90° = 0)$

Векторное произведение (cross product)

Через угол:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$$

Векторное произведение (cross product)

Через угол:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\theta$$

Через координаты:

$$\vec{a} \times \vec{b} = x_a y_b - y_a x_b$$

Векторное произведение: геометрический смысл

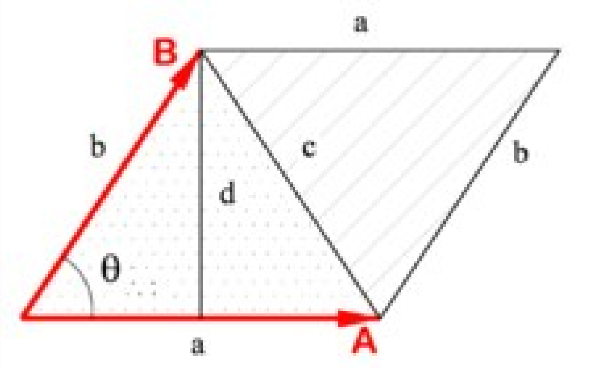

Figure 3: Площадь параллелограмма

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ — площадь параллелограмма, натянутого на $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Векторное произведение: свойства

- Антисимметрично: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- $\vec{b}$ «слева» от $\vec{a}$ (против ч.с.) $\Rightarrow$ произведение > 0
- $\vec{b}$ «справа» от $\vec{a}$ (по ч.с.) $\Rightarrow$ произведение < 0
- **Вектора коллинеарны** $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad (\sin 0° = 0)$

Угол между векторами

Используем оба произведения:

- dot $= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
- cross $= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

Угол между векторами

Используем оба произведения:

- dot $= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$
- cross $= |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$

```
double angleBetween(Point a, Point b) {
    return std::atan2(cross(a, b), dot(a, b));
}
```

Прямая на плоскости

Способ 1: общее уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

- (A, B) — **вектор нормали** (перпендикулярен прямой)
- $(-B, A)$ — **направляющий вектор** (параллелен прямой)
- $Ax + By + C > 0$ задаёт **полуплоскость**

Прямая: точка и направляющий вектор

Способ 2

Точка P_0 на прямой + направляющий вектор $\vec{d}$:

$$P = P_0 + t \cdot \vec{d}, \quad t \in \mathbb{R}$$

В координатах:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot d_x \\ y = y_0 + t \cdot d_y \end{cases}$$

Прямая: две точки

Способ 3

Две различные точки A и B: $\vec{d} = B - A$, начальная точка A:

$$P = A + t \cdot (B - A), \quad t \in \mathbb{R}$$

Сводится к способу 2

Вывод $y = kx + b$ из двух точек

Выражаем t из первого координатного уравнения:

$$t = \frac{x - A_x}{B_x - A_x}$$

Вывод $y = kx + b$ из двух точек

Выражаем t из первого координатного уравнения:

$$t = \frac{x - A_x}{B_x - A_x}$$

Подставляем во второе:

$$y = A_y + \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} \cdot (x - A_x)$$

Вывод $y = kx + b$ из двух точек

Выражаем t из первого координатного уравнения:

$$t = \frac{x - A_x}{B_x - A_x}$$

Подставляем во второе:

$$y = A_y + \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} \cdot (x - A_x)$$

$$k = \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = \tan \alpha$$

Важно: не работает для вертикальных прямых ($B_x = A_x$)!

Расстояние между двумя точками

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2}$$

Расстояние от точки до прямой

Через уравнение

Прямая $Ax + By + C = 0$, точка (x_0, y_0):

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Расстояние от точки до прямой

Через векторное произведение

Расстояние от точки до прямой

Через векторное произведение

Прямая задана точками A, B. Площадь $\triangle PAB$: $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot h$

Расстояние от точки до прямой

Через векторное произведение

Прямая задана точками A, B. Площадь $\triangle PAB$: $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot h$

$$h = \frac{2S}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Расстояние от точки до луча

Луч из A в направлении B, точка P:

- Проекция P попадает **на луч** ($\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq 0$) $\Rightarrow$ расстояние до прямой

Расстояние от точки до луча

Луч из A в направлении B, точка P:

- Проекция P попадает **на луч** ($\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq 0$) $\Rightarrow$ расстояние до прямой
- Проекция **за начало** луча ($\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} < 0$) $\Rightarrow \rho(P, A)$

Расстояние от точки до отрезка

Аналогично лучу, но проверяем **обе** границы: $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = 0$ и $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} \geq 0$

Точка на прямой

P лежит на прямой $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны:

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = 0$$

Пересечение двух прямых

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Пересечение двух прямых

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Пересечение двух прямых

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

$D = A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \Rightarrow$ прямые параллельны (или совпадают)

Пересечение двух отрезков

Отрезки P_1P_2 и Q_1Q_2 пересекаются, если концы каждого лежат **по разные стороны** от прямой другого

Figure 4: Пересечение отрезков

Пересечение отрезков: критерий

«Q_1 и Q_2 по разные стороны от P_1P_2»:

$$(\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1Q_1}) \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1Q_2}) < 0$$

Аналогичное условие для P_1, P_2 относительно Q_1Q_2

Точка пересечения — пересечение содержащих прямых (через `intersectLines`)

Проекция точки на прямую

Прямая: точка A + направление $\vec{d}$. Параметр проекции:

$$t = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2}$$

Проекция точки на прямую

Прямая: точка A + направление $\vec{d}$. Параметр проекции:

$$t = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2}$$

Точка проекции: $A + t \cdot \vec{d}$

Итоги

- Точка $\simeq$ вектор — храним одной структурой `Point`
- **Скалярное произведение**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$, связано с $\cos\theta$
  - Перпендикулярность $\Leftrightarrow$ dot $= 0$
- **Векторное произведение**: $\vec{a} \times \vec{b} = x_a y_b - y_a x_b$, связано с $\sin\theta$
  - Коллинеарность $\Leftrightarrow$ cross $= 0$

Итоги

- Точка $\simeq$ вектор — храним одной структурой `Point`
- **Скалярное произведение**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$, связано с $\cos\theta$
  - Перпендикулярность $\Leftrightarrow$ dot $= 0$
- **Векторное произведение**: $\vec{a} \times \vec{b} = x_a y_b - y_a x_b$, связано с $\sin\theta$
  - Коллинеарность $\Leftrightarrow$ cross $= 0$

- 3 способа задать прямую; расстояния через формулу и через cross
- Принадлежность точки прямой / лучу / отрезку — через dot и cross
- Пересечение прямых — система уравнений; отрезков — разные стороны

Итоги

- Точка $\simeq$ вектор — храним одной структурой `Point`
- **Скалярное произведение**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$, связано с $\cos\theta$
  - Перпендикулярность $\Leftrightarrow$ dot $= 0$
- **Векторное произведение**: $\vec{a} \times \vec{b} = x_a y_b - y_a x_b$, связано с $\sin\theta$
  - Коллинеарность $\Leftrightarrow$ cross $= 0$

- 3 способа задать прямую; расстояния через формулу и через cross
- Принадлежность точки прямой / лучу / отрезку — через dot и cross
- Пересечение прямых — система уравнений; отрезков — разные стороны

Следующая лекция: выпуклые многоугольники, принадлежность точки многоугольнику